№8-дәріс

Тамаша шектер. Шексіз шамаларды салыстыру. Эквивалентті шексіз аз және оларды шекті есептеуге қолдану.

Шексіз аз және шексіз үлкен функциялар.

Анықтама. $\alpha(x)$ функциясы $x \to a$ ұмтылғанда шексіз кіші (үлкен) деп аталады, егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ $\left[\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\infty\right]$.

$u(a)$ - a нүктесінің қандай да бір аймағы болсын, $\alpha(x)$ - $x \to a$ ұмтылғандағы шексіз кіші, ал $\beta(x)$ - шексіз үлкен функциялар болсын.

Теоремалар

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ орындалуы үшін, $f(x)=b+\alpha(x)$ $\forall x \in u(a)$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

2. Егер $u(a)$-да $f(x)$ шектелген және $|f(x)|>M>0$ болса, онда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\alpha(x)}=\infty, \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0.$$

3. Егер $u(a)$-да $f(x)$ шектелген болса, онда $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)]=0$

$\alpha(x)$ және $\beta(x)$ - $x \to a$ ұмтылғандағы шексіз кіші болсын және $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$ шегі табылсын, онда егер

а) $C \neq 0$ - ақырлы болса, онда α және β - бір ретті шексіз кіші функциялар, ал егер $C=1$ болса, онда α және β - эквивалентті $(\alpha \sim \beta)$ шексіз кіші функциялар.

Е с к е р т у. Шекті есептеу кезінде кез келген шаманы оған эквивалентті шамамен ауыстыруға болады.

б) $C=0$ болса, $\alpha(x)$ $\beta(x)$-ке қарағанда жоғары ретті шексіз кіші функция және оны былай жазамыз: $\alpha=0(\beta)$.

в) $C=\infty$ болса, $\beta(x)$ $\alpha(x)$ -ке қарағанда жоғары ретті шексіз кіші функция.

Шексіз үлкен функциялар осыған ұқсас салыстырылады.

Анықталмағандықтар

$A=B=0$ болған жағдайда, $f(x)$ және $\varphi(x)$функцияларының қалай берілгендігіне байланысты C анықталмаған болуы мүмкін, онда $x \to a$ ұмтылғанда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ функциясы $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты береді .

Негізгі анықталмағандықтар мыналар:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^{\infty},\quad 0^{\infty},\quad \infty^{0}.$$

Мысал 1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$ тап.

$\infty-\infty$ түріндегі анықталмағандықты аламыз. Осы анықталмағандықты ашу үшін жақшаның ішіндегі өрнекті ортақ бөлімге келтіре отырып, мна өрнекті аламыз: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4}$, яғни, $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандыққа келдік. Бұл анықталмағандық бөлшекті $x-2\neq 0$ ортақ көбейткішке қысқарту көмегімен оңай ашылады. Сонымен, берілген шектің мәні $\lim\limits_{x\to 2}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=-\frac{1}{4}$

Мысал 2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}$ тап.

$\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықты аламыз. Бұл анықталмағандықты ашу үшін бөлшектің бөлімін де, алымын да x^3-қа бөлеміз. Онда $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}$, бөлімі $x\to\pm\infty$ жағдайда нөлге тең емес болғандықтан, шектер туралы теоремаларды қолдансақ:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}2-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}1+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^3}}=2.$$

Тамаша шектер

Практикада жиі кездесетін функциялардың шектеріне тоқталалық. $\alpha(x)$ - қандай да бір функция болсын және

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \qquad (1)$$

теңдігі орындалсын.

1. Бірінші тамаша шек $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1 \qquad (2)$$

(2)-ші теңдіктен бірден төмендегі теңдіктерді алуға болады:

$$\lim_{x\to a}\frac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\frac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1.$$

Ендеше, (1)-ші шарт орындалғандықтан, $\sin\alpha(x)$, $tg\alpha(x)$, $\arcsin\alpha(x)$ және $\alpha(x)$ функциялары - эквивалентті функциялар.

Мысал 3.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+arctgx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)$. $\lim\limits_{x\to 0}2x=\lim\limits_{x\to 0}x=0$ болғандықтан, (1)-ші шарт орындалады, онда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+arctgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+x}{x}=3.$

б)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi+2x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\lim_{x\to0}(\pi+2x)\neq0\right|=-\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\left|\lim_{x\to0}2x=0\right|=-\lim_{x\to0}\frac{2x}{x}=-2.$$

2. Екінші тамаша шек (1^{∞}).

$$\lim_{x\to a}[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)}=e$$

Үзіліссіз функциялар

R_n-де қандай да бір M_0 нүктесінің маңайында $y=f(M)$ функциясы анықталсын.

Анықтама. Функция $f(M)$ функциясы M_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады, егер

а) M_0 нүктесінде $f(M)$ анықталған болса

б) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ шегі табылса

в) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$.

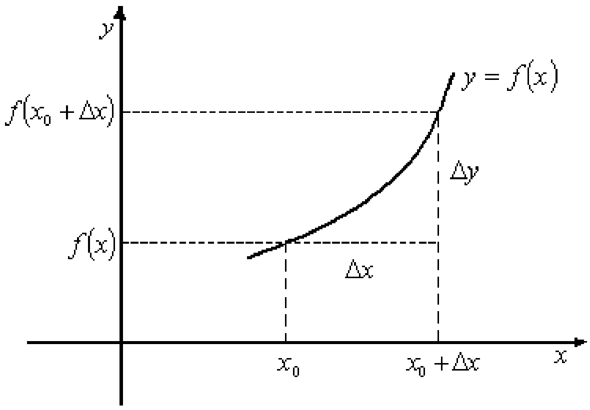
Егер а), б), в) шарттарының тым болмағанда біреуі орындалмаса, онда M_0 нүктесі $y=f(M)$ функциясының үзіліс нүктесі деп аталады.

Бір айнымалы $y=f(x)$ үзіліссіз функцияларының қасиеттерін қарастырамыз.

Егер $f(x)$ функциясы a нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f(a-0)=f(a+0)=f(a)$ теңдіктері орындалатындығы анық.

Үзіліссіздіктің тағы бір анықтамасын берелік.

x_0 нүктесінде x айнымалысына Δx өсімшесін береміз.



Онда функция Δy өсімшесін алады, әрі

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x).$$

Анықтама. $y=f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үзіліссіз деп айтамыз, егер ол осы нүктеде анықталып және $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$ теңдігі орындалса.

Мысал 4. $y=x^2$ функциясын кез келген $x_0\in(-\infty;\infty)$ нүктесінде үзіліссіз екендігін дәлелде.

Шынында да,

$$f(x_0)=x_0^2 \Rightarrow f(x_0+\Delta x)=f(x_0+x)^2 \Rightarrow \Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=\Delta x\cdot(2x_0+\Delta x).$$

Бұдан $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x(2x_0+\Delta x)=0$.

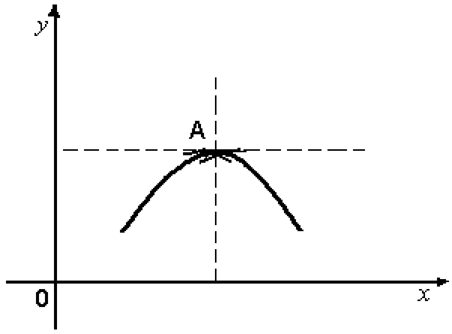
Қасиеттері:

1. Егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы нүктеде $f(x)\pm\varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, $(\varphi(x_0)\neq 0)$ функциялары да үзіліссіз.

2. Егер $y=f(x)$ функциясы $x=a$ нүктесінде үзіліссіз, ал $x=\varphi(t)$ функциясы α нүктесінде үзіліссіз болса, мұндағы $\alpha=\varphi(\alpha)$, онда $y=f(\varphi(t))$ күрделі функциясы $t=\alpha$ нүктесінде үзіліссіз.

Функцияның үзіліс нүктелері

Анықтама . $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі x_0 жөнделінетін үзіліс нүктесі деп аталады, егер $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ шегі болып, бірақ та $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталмаған немесе $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$ болса.



Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде жөнделетін үзілісті функция болса, онда ол үзілісті жөндеуге болады. Яғни, $f(x_0)$ анықталмаған, ал $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ болса, онда $f(x_0)=A$ деп алып, $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үзіліссіз қылып жіберуге болады.

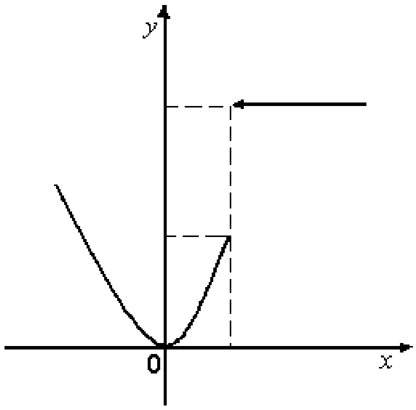
Анықтама. x_0 нүктесі бірінші түрдегі үзіліс нүктесі деп аталады, егер $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ табылып, тұрақты санға тең болса және $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ теңдігі орындалса.

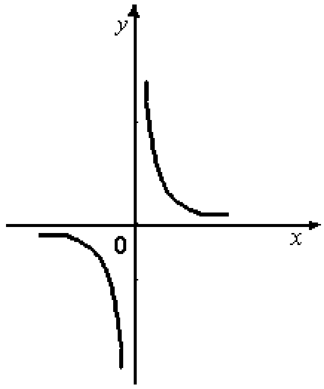
Мысал 5.

$$y=\begin{cases}x^2, & \text{егер } x\le 1\\ 2, & \text{егер } x>1\end{cases}$$

$$y(1-0)=\lim_{x\to 1-0}y=\lim_{x\to 1-0}x^2=1,\quad y(1+0)=\lim_{x\to 1+0}y=\lim_{x\to 1+0}2=2.$$

$x_0=1$ нүктесі бірінші түрдегі үзіліс нүктесі, себебі $y(1-0)\neq y(1+0)$.





Басқа үзіліс нүктелерін екінші түрдегі үзіліс нүктесі деп айтамыз.

Кесіндідегі үзіліссіз функциялар

Анықтама . $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз деп аталады, егер ол $(a;b)$ аралығындағы әрбір нүктеде үзіліссіз болса және $f(a+0)=f(a),\ f(b-0)=f(b)$ теңдігі орындалса.

D облысындағы үзіліссіз функциялардың класын $C(D)$ деп белгілейміз.

Теоремалар.

1. Егер $f(x)\in C[a;b]$, онда $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде шектелген.

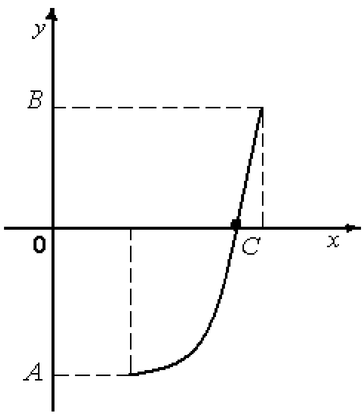
2. Егер $f(x)\in C[a;b]$, онда $f(x)$ функциясы осы кесіндіде тым болмағанда бір рет ең үлкен мән M мен ең кіші мән m қабылдайды, яғни,

$$m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a;b]$$

3. $f(x)\in C[a;b]$ және $f(a)=A,\ f(b)=B$ болсын, әрі $A=B$ болсын.

Онда $\forall\mu:\ \ A\le\mu\le B \quad \exists x=C$, мұндағы $f(C)=\mu$.

Салдар 1. Егер 3-теоремада $AB<0$, онда $f(C)=0,\ C\in(a;b)$ орындалатындай $\exists C$.



Е с к е р т у. $y=f(x)$ бірайнымалы функцияның шектері (біржақты шектерден басқа) мен үзіліссіздігі туралы теоремалар мен қасиеттер көп айнымалы функциялар үшін де ақиқат.